

Solusi Kuis ke-3 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Rekursi dan Relasi Rekurens, Teori Graf  
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili  
Senin, 10 November 2014  
Waktu: 50 menit

1. Tentukan relasi rekurens dari  $(a_n)_{n=1,2,3,\dots}$  jika diketahui (masing-masing 4 soal):  
a.  $a_n = 6n + 5$ ;    b.  $a_n = 5$ ;    c.  $a_n = 5^n$ ;    d.  $a_n = 1 + (-1)^n$

**Jawaban:**

- a.  $a_{n+1} = a_n + 6$  ;  $a_1 = 11$   
b.  $a_{n+1} = a_n$  ;  $a_1 = 5$   
c.  $a_{n+1} = 5a_n$  ;  $a_1 = 5$   
d.  $a_{n+1} = a_n + 2(-1)^{n+1}$  ;  $a_1 = 0$

2. Tentukan solusi relasi rekurens berikut:  $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$  ;  $a_0 = 6$  dan  $a_1 = 16$

**Jawaban:**

Persamaan karakteristik :  $r^2 - 3r - 10$

akar-akarnya :  $(r+2)(r-5) = 0 \rightarrow r_1 = 5$  dan  $r_2 = -2$

$$a_n = \alpha_1 5^n + \alpha_2 (-2)^n$$

$$a_0 = \alpha_1 5^0 + \alpha_2 (-2)^0 = 6$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 6$$

$$a_1 = \alpha_1 5^1 + \alpha_2 (-2)^1 = 16$$

$$5\alpha_1 - 2\alpha_2 = 16$$

Diperoleh dari persamaan diatas  $\alpha_1 = 4$  dan  $\alpha_2 = 2$ . Jadi solusinya adalah:  $a_n = 4(5^n) + 2(-2)^n$

3. Tentukan rumus eksplisit (solusi) dari relasi rekurensi berikut

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \\ 4(f(x-1) - f(x-2)), & x \geq 2 \end{cases}$$

**Jawaban:**

Persamaan karakteristik relasi rekurensi di atas adalah  $x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$ . Karena akar-akarnya kembar, maka bentuk umum solusinya adalah  $f(x) = \alpha x \cdot 2^x + \beta \cdot 2^x$ .

Substitusi  $x = 0$  mendapatkan  $\beta = -1$ . Substitusi  $x = 1$  mendapatkan  $2\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ .

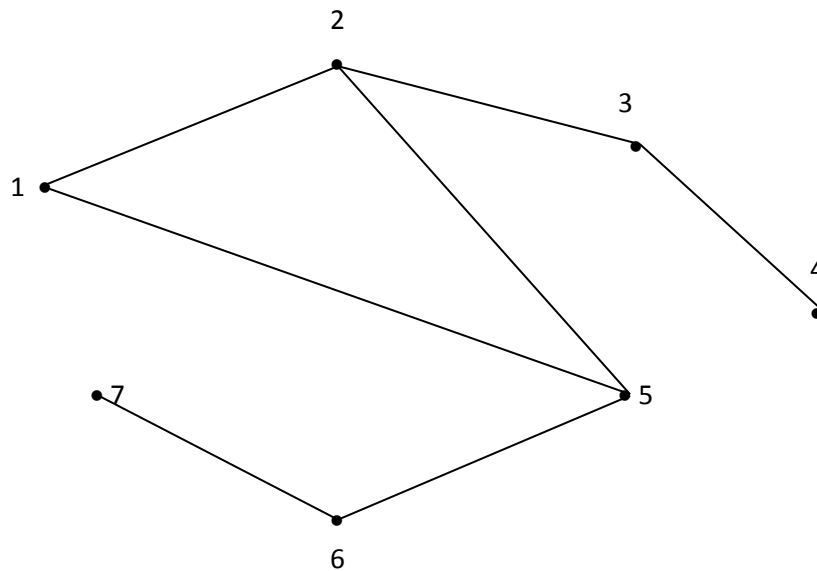
Jadi, solusi dari relasi rekurensi di atas adalah  $f(x) = (x - 1)2^x$ .

4. Di suatu negara terdapat 7 buah stasiun televisi. Pemerintah menetapkan aturan bahwa dua stasiun televisi yang berjarak  $\leq 150$  km tidak boleh beroperasi pada saluran frekuensi (UHF) yang sama. Tabel di bawah ini memperlihatkan jarak (km) antar stasiun televisi.  
(a) Gambarkan graf yang memodelkan persoalan ini. Jelaskan pula arti setiap simpul dan sisi pada graf anda.  
(b) Berapa minimal dan maksimal banyak frekuensi berbeda yang dibutuhkan bagi ketujuh stasiun TV tersebut sesuai dengan aturan Pemerintah?

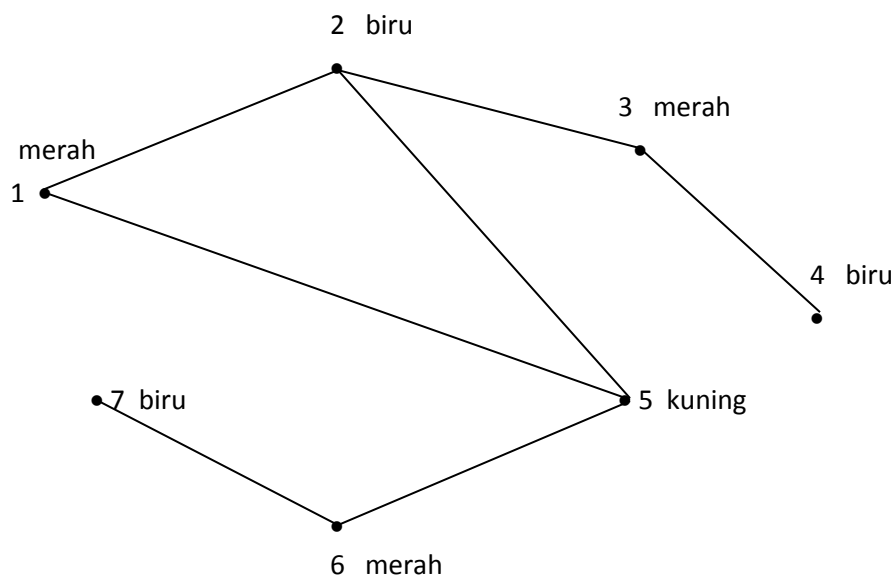
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	85	175	200	50	100	230
2	-	-	125	175	100	160	145
3	-	-	-	100	200	250	160
4	-	-	-	-	210	220	180
5	-	-	-	-	-	100	235
6	-	-	-	-	-	-	120
7	-	-	-	-	-	-	-

**Jawaban:**

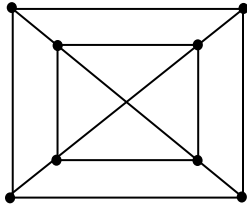
(a) Graf yang merepresentasikan persoalan tersebut. Simpul menyatakan stasiun televisi, sisi menyatakan dua stasiun berjarak  $\leq 125$  km.



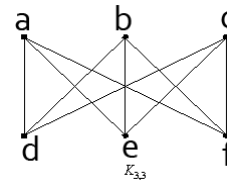
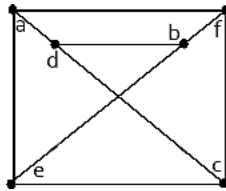
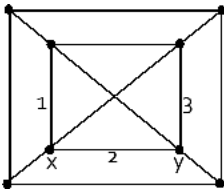
(b) Jumlah frekuensi berbeda maksimal = 7  
 Jumlah frekuensi minimal = 3



5. Dengan teorema kuratowski, buktikan bahwa graf di bawah ini bukan merupakan graf planar.



**Jawaban:**



Perhatikan graf pada soal di gambar paling kiri.

Dengan menghilangkan sisi 1, 2, dan 3. Serta mengeliminasi simpul x dan y. Kita dapatkan graf yang homeomorfik dengan upagraf dari graf pada soal. (gambar tengah)

Dan graf tersebut isomorfik dengan graf  $K_{3,3}$

$\therefore$  Berdasarkan teorema kuratowski, karena memiliki homeografik upagraf yang isomorfik dengan  $K_{3,3}$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa **graf pada soal merupakan graf tidak planar. (QED)**